Seminar zur Darstellungstheorie von GL_2
Dozenten: Dr. Ludwig und Prof. Böckle
Wintersemester 18/19

In diesem Seminar wollen wir die glatten, zulässigen Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ studieren. Eine Darstellung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ auf einem komplexen Vektorraum V heißt glatt, wenn jeder Vektor eine offene Stabilisatorgruppe hat; sie heißt zulässig, wenn für jede kompakte offene Untergruppe $K \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, der Raum V^K, der von K fixierten Vektoren, endlich dimensional ist. Solche Darstellungen tauchen in der Theorie der automorphen Formen auf. Wir werden verschiedene glatte, zulässige Darstellungen definieren und konstruieren (z.B. Hauptseriendarstellungen, superkuspidale Darstellungen) und sie im Verlauf des Seminars vollständig klassifizieren. Ziel des Seminares ist es, die lokale Langlands Korrespondenz für GL(2) zu formulieren.

Vorträge

1) Lokal Proendliche Gruppen und Grundlagen ihrer Darstellungstheorie

Referenz: [BH] Kapitel 1 und 2.
Definiere, was eine lokal pro-endliche Gruppe ist und zeige, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ lokal proendlich ist. Definiere, was eine glatte zulässige Darstellung einer lokal pro-endlichen Gruppe ist, sowie die Begriffe "irreduzible Darstellung" und "halbeinfache Darstellung". Beweise die Zerlegung einer glatten Darstellung in K-isotypische Komponenten ([BH], 2.3 Proposition (1)). Definiere Charaktere, d.h. ein-dimensionale Darstellungen, sowie die duale Darstellung.

2) Hecke-Algebren und Charaktere

Referenz: [BH] Kapitel 4 und [B] Kapitel 4.2.
Definiere die Hecke-Algebra $\mathcal{H}$ der glatten Funktionen auf $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ mit kompaktem Träger. Führe zu jeder kompakten offenen Untergruppe $K \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ die zugehörige Hecke Algebra $\mathcal{H}_K$ ein. Beweise [BH] 4.3 Proposition. Definiere die Spur einer Darstellung als Distribution ([B] S. 431) und beweise [B] Theorem 4.2.1.

3) Hauptreihendarstellungen und Jacquet-Moduln

Referenz: [BH] Kapitel 9.
Definiere die sogenannten Hauptreihendarstellungen $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi)$. Definiere den Jacquet-Modul V_N einer Darstellung (π, V) und erkläre welche Darstellung einen nicht-trivialen Jacquet-Modul haben. Berechne den Jacquet-Modul von Hauptreihendarstellung und beweise das Kriterium für Irreduzibilität von Hauptreihendarstellungen, [BH] 9.6. Erkläre, was die Steinberg Darstellung ist, definiere "superkuspidale Darstellungen" und gib die Klassifikation der irreduziblen nicht-superkuspidalen Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([BH] 9.11).

4) Superkuspidale Darstellungen
Referenz: [BH] Kapitel 11.
Definiere "kompakte Induktion" ([BH] 11.3). Beweise die Konstruktion von superkuspidalen Darstellungen mittels kompakter Induktion wie in [BH] 11.4 Theorem. Skizziere das Beispiel aus [BH] 11.5 Theorem.

5) Unverzweigte Darstellungen und der Satake-Isomorphismus
Referenz: [B] Kapitel 4.6.
Definiere den Begriff einer unverzweigten Darstellung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Sei $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}$ die Hecke-Algebra der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-bi-invarianten Funktionen auf $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ mit kompaktem Träger. Beweise, dass die Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}$ kommutativ ist und bestimme ihre genaue Struktur ([B] Proposition 4.6.5). Bestimme alle unverzweigten Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([B] Theorem 4.6.4).

6) Weil-Deligne Darstellungen
Referenz: [BH] Kapitel 28, 29 und 31.
Definiere die Weil-Gruppe eines p-adischen Körpers ([BH] 28.4) und beweise, dass ihre irreduziblen glatten Darstellungen endlich dimensional sind ([BH] 28.6 Lemma 1). Erkläre, wie man die Halbeinfachheit einer Darstellung der Weil-Gruppe mittels Frobenius-Elementen prüfen kann ([BH] 28.6. Proposition 2). Definiere die Artin L-Funktion ([BH] 29.3), sowie die lokale Langlands-Deligne Konstante ([BH] 29.4 Theorem (ohne Beweis)) einer halbeinfachen glatten Darstellung der Weil-Gruppe. Definiere Weil-Deligne Darstellungen ([BH] 31.1). Erkläre das Beispiel der Darstellungen $\mathrm{Sp}(n)$ ([BH] 31.1).

7) Die lokale Langlands Korrespondenz für GL_2
Referenz: [BH] Kapitel 24 und 33.
Definiere die L-Funktion ([BH] 24.2 Theorem (ohne Beweis)) und die lokale Godement-Jacquet Konstante einer glatten irreduziblen Darstellung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([BH] 24.2 und 24.3). Formuliere die lokale Langlands Korrespondenz für GL_2 ([BH] 33.1). Erkläere die Korrespondenz explizit für alle nicht superkuspidalen Darstellungen ([BH] 33.3).

References

[B] Bump, Daniel, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 55, 1998.

[BH] Bushnell, Colin J. and Henniart, Guy, *The Local Langlands Conjecture for* GL(2) Springer, 2006.