Proseminar
Bilinearformen und Klassische Gruppen

Prof. Dr. Gebhard Böckle, Julian Quast

Sommersemester 2019, Dienstag 14-16 Uhr, SR1

Motivation und Ziele des Proseminars

Euklidische Geometrie kann als das Studium eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammen mit einem Skalarprodukt, durch welches die Länge eines Vektors x und der Kosinus des Winkels θ zwischen zwei Vektoren x, y durch einfache Formeln gegeben ist, aufgefasst werden. Für das Standardskalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^n$, welches für Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ durch $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ gegeben ist, ergeben sich $|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ beziehungsweise $|x||y| \cos\theta = x \cdot y$. Das Skalarprodukt ist bilinear, d.h., es erfüllt die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} (x + x') \cdot y &= x \cdot y + x' \cdot y \\ x \cdot (y + y') &= x \cdot y + x \cdot y' \\ (ax) \cdot y &= x \cdot (ay) \ = \ a(x \cdot y) \end{aligned}$$

für $x, x', y, y' \in V$ und $a \in \mathbb{R}$. Außerdem ist es symmetrisch, d.h., es gilt $x \cdot y = y \cdot x$, und es ist positiv definit, d.h. $x \cdot x > 0$ für $x \neq 0$.
Im Proseminar betrachten wir endlich-dimensionale Vektorräume V über einem beliebigen Körper K zusammen mit einer Bilinearform $B\colon V \times V \to K$. Diese übernimmt die Funktion des Skalarproduktes. Von besonderer Bedeutung sind einerseits symmetrische und andererseits alternierende Bilinearformen, da in genau diesen Fällen Orthogonalität eine symmetrische Relation ist; dabei heißt B alternierend, wenn $B(x, x) = 0$ für alle $x \in V$. Die ersten Vorträge behandeln Grundlagen hierzu, sowie Zerlegungssätze für metrische Räume, d.h. für Paare (V, B) für B eine Bilinearform auf V.
Fixiert man ein solches Paar (V, B), so sind diejenigen K-linearen Abbildungen $\eta\colon V \to V$ von besonderer Bedeutung, die B erhalten, d.h., für welche $B(\eta(x), \eta(y)) = B(x, y)$ für alle $x, y \in V$ gilt. Die Gesamtheit aller solcher η zu (V, B) bilden eine Gruppe. Die so entstehenden Gruppen, zusammen mit den Gruppen GL_n und SL_n, sind die sogenannten *klassischen* Gruppen in der Sprechweise von Hermann Weyl.
Ein großer Teil des Seminars wird sich mit der Strukturtheorie dieser Gruppen beschäftigen. Wir werden Erzeuger kennenlernen; im orthogonalen Fall, wenn B symmetrisch ist, sind dies Spiegelungen, im symplektischen Fall, wenn B alternierend ist, sognennante Transvektionen. Wir werden sehen, dass diese Gruppen modulo ihrem Zentrum (bis auf GL_n) für fast alle K einfach sind. Ist K ein endlicher Körper, so sind die klassischen Gruppen endlich und wir werden ihre Kardinalität bestimmen.

Organisatorisches

- *Vorbesprechung:* **Dienstag, den 12.02.2019 um 14.00 Uhr c.t. in Seminarraum A**
- *Voraussetzungen:* Erfolgreiche Teilnahme an den Vorlesungen Analysis 1 und Lineare Algebra 1
- *Homepage:* `https://typo.iwr.uni-heidelberg.de/groups/arith-geom/home/members/julian-quast/bilinearformen/`
- Spätestens zwei Wochen vor dem eigenen Vortrag oder generell bei Verständnisfragen in die Sprechstunde kommen (Julian Quast: Montag 14.00 Uhr - 16.00 Uhr, Raum 3/222)