Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

31. Oktober 2018

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 2

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Ordnung ist wohldefiniert, 4 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche, $f \in \mathcal{M}(X)$ eine meromorphe Funktion und $x_0 \in S(f)$ eine Polstelle. Zeigen Sie, dass die Definition der Polstellenordnung von f in x_0 nicht von der verwendeten Karte abhängt.

Aufgabe 2 (Verzweigung, 6 Punkte)

(a) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $a \in U$ und $b = f(a)$. Zeigen Sie:

(i) Die Vielfachheit $b\text{-ord}(f;a)$, mit der f in a den Wert b annimmt, lässt sich berechnen als
$$b\text{-ord}(f;a) = \min\{n \geq 1 \mid f^{(n)}(a) \neq 0\},$$
wobei $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f ist.

(ii) a ist genau dann Verzweigungspunkt von f, wenn $f'(a) = 0$.

(b) Sei $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}, z \mapsto z^2 + \frac{1}{z^2}$. Bestimmen Sie alle Verzweigungspunkte und die jeweiligen Verzweigungsordnungen.

Bitte wenden! ⟶

Abgabe: **Mittwoch**, 7. November 2018, bis spätestens 9 Uhr ct.

Aufgabe 3 (Fortsetzen von konformen Abbildungen, 6 Punkte)

Seien X und Y kompakte Riemannsche Flächen, $A \subset X$ und $B \subset Y$ endliche Teilmengen und $p : X \setminus A \to Y \setminus B$ eine konforme Abbildung. Ziel ist es zu zeigen, dass p zu einer konformen Abbildung $f : X \to Y$ fortgesetzt werden kann. Zeigen Sie hierfür:

(a) Ist $V \subset Y$ eine offene Teilmenge, die B enthält, so ist $U := X \setminus p^{-1}(Y \setminus V)$ eine offene Teilmenge von X, die A enthält.

(b) Für alle $y \in B$ existieren offene Umgebungen $U_y \subset Y$ so, dass das Folgende erfüllt ist:

  (i) Für alle $y \in B$ gibt es eine Karte $\varphi_y : U_y \to V_y$ mit offenem beschränktem Zielbereich $V_y \subset \mathbb{C}$.

  (ii) Für je zwei verschiedene Punkte $y, y' \in B$ ist $U_y \cap U_{y'} = \emptyset$.

(c) Für jedes $x \in A$ gibt es eine offene Umgebung $U_x \subset X$ von x so, dass das Folgende gilt:

  (i) $U_x \cap A = \{x\}$.

  (ii) $U_x \setminus \{x\}$ ist zusammenhängend.

  (iii) Es existiert ein $y \in B$, sodass $p(U_x \setminus \{x\}) \subset U_y$, wobei U_y so wie in (b) gewählt sei.

(d) Die Abbildung p lässt sich zu einer holomorphen Funktion $f : X \to Y$ fortsetzen.

(e) Die entsprechende holomorphe Fortsetzung $g : Y \to X$ von $p^{-1} : Y \setminus B \to X \setminus A$ ist die inverse Abbildung von f. Insbesondere ist f konform.