Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

21. November 2018

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 5

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Eulerscher Ergänzungssatz, 6 Punkte)

Zeigen Sie den Eulerschen Ergänzungssatz (Satz 2.39)

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

mit dem Satz von Wielandt (Satz 2.42), indem Sie die Funktion

$$f(z) := \frac{\pi \cdot (1-z)}{\Gamma(2-z) \cdot \sin(\pi z)} \quad \forall z \in S_1^2 \setminus \{1\} = \{w \in \mathbb{C} \mid 1 \leq \Re(w) \leq 2\} \setminus \{1\}$$

betrachten und folgendes zeigen:

1. f besitzt bei $z = 1$ eine hebbare Singularität mit $f(1) = 1$,
2. f erfüllt die Bedingungen aus dem Satz von Wielandt,
3. $f(z) = \frac{\pi}{\Gamma(1-z)\sin(\pi z)}$.

Hinweis zu 2: Verwenden Sie für die Beschränktheit auf S_1^2 die Definition der Γ-Funktion.

Aufgabe 2 (Verallgemeinerung von Legendres Duplikationsformel [Skript A2.4], 4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Verallgemeinerung von Legendres Duplikationsformel 2.43 gilt:

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{z+\nu}{n}\right) = (\sqrt{2\pi})^{n-1} n^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(z)$$

für alle $z \in D_{-\mathbb{N}}$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\nu\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

gilt.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (Charakterisierung von Gittern, 6 Punkte)

Zu zeigen ist, dass die Definition eines Gitters in der Vorlesung mit der Definition aus dem Skript eines Gitters zu Perioden ω_1 und ω_2 übereinstimmt:
Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda$ mit

$$|\omega_1| = \min\{|\lambda| \mid \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}\} \quad \text{und} \quad |\omega_2| = \min\{|\lambda| \mid \lambda \in \Lambda \setminus \mathbb{Z}\omega_1\}.$$

Zeigen Sie:

1. $\Lambda \cap \mathbb{R}\omega_1 = \mathbb{Z}\omega_1$,
2. ω_1 und ω_2 sind $\mathbb{R}$-linear unabhängig,
3. $\forall \lambda \in \Lambda\ \exists r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda = r_1\omega_1 + r_2\omega_2$ und $|r_1 - k_1| \le \frac{1}{2}, |r_2 - k_2| \le \frac{1}{2}$,
4. $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$.