Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

28. November 2018

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 6

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Elliptische Funktion mit zwei einfachen Polstellen, 6 Punkte)

Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) := -\frac{1}{z} - \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

Zeigen Sie:

(a) Die angegebene Reihe für f konvergiert auf Kompakta in $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ absolut gleichmäßig, und stellt daher eine meromorphe Funktion mit einfachen Polstellen bei allen Punkten in Λ dar.

(b) f ist eine Stammfunktion der Weierstraßschen $\wp$-Funktion zum Gitter Λ.

(c) Für alle $\omega \in \Lambda$ gibt es $a_\omega \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z+\omega) = f(z) + a_\omega \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda.$$

(d) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $2z_0 \notin \Lambda$, dann ist die durch

$$g(z) := f(z - z_0) - f(z + z_0) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \big((z_0 + \Lambda) \cup (-z_0 + \Lambda) \big)$$

gegebene meromorphe Funktion g eine elliptische Funktion bzgl. Λ, die an den Stellen in $(z_0 + \Lambda) \cup (-z_0 + \Lambda)$ einfache Polstellen hat und sonst keine Polstellen.

Aufgabe 2 (Ungerade elliptische Funktionen, 4 Punkte)

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $f \in K(\Lambda)$ mit $f(-z) = -f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Man zeige: Für jeden Gitterpunkt $\omega \in \Lambda$ hat f in $\frac{\omega}{2}$ eine Null- oder Polstelle ungerader Ordnung.

Hinweis: Man betrachte die Laurent-Entwicklung von f um den Punkt $\frac{\omega}{2}$.

Bitte wenden! ⟶

Abgabe: **Mittwoch**, 5. Dezember 2018, bis spätestens 9 Uhr ct.

Aufgabe 3 (Abgeschwächte Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion, 6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, die nicht konstant 0 ist, und $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Zu jedem Gitterpunkt $\omega \in \Lambda$ existiere eine Zahl $c_\omega \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f(z + \omega) = c_\omega f(z).$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $\frac{f'}{f}$ ist elliptisch.

(b) f besitzt keine Nullstelle. (*Hinweis: Null- und Polstellen zählendes Integral*)

(c) Die Funktion $\frac{f'}{f}$ ist konstant.

(d) Es existieren Konstanten $a, c \in \mathbb{C}$, sodass $f(z) = ce^{az}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.