Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

19. Dezember 2018

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 9

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Gruppenoperation, 6 Punkte)

Sei Z der Zylinder von Blatt 1, Aufgabe 3 und

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \middle| a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0 \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ und $(x, y, z) \in Z$ gilt: $(ax + by, cx + dy, z) \in Z$

(b) Durch $\varphi : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Bij}(Z), A \mapsto \varphi_A$ mit $\varphi_A(x, y, z) = (ax + by, cx + dy, z)$ wird eine Links-Operation von $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ auf Z definiert.

(c) Bestimmen Sie die Bahnen der Operation und beschreiben Sie den Bahnenraum $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\backslash Z$.

Aufgabe 2 (Elliptische, parabolische und hyperbolische Matrizen und ihre Fixpunkte, 6 Punkte)

Wir betrachten die Matrizen $M_1, M_2, M_3 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gegeben durch

$$M_1 = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix},$$

welche auf $\mathbb{H}$ durch Möbiustransformationen operieren.

1. Bestimmen Sie jeweils, ob die Matrizen elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind.
2. Bestimmen Sie jeweils den/die Fixpunkt(e) in $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ der induzierten Operationen auf $\overline{\mathbb{C}}$.

Bitte wenden! $\longrightarrow$

Bonusaufgabe 3 (Grade holomorpher Abbildungen, 2 Bonuspunkte)

Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gibt es eine nicht-konstante holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \overline{\mathbb{C}}$ vom Grad n?

Bonusaufgabe 4 (Nochmals zur Gammafunktion, 2 Bonuspunkte)

Berechnen Sie $\Gamma(1/6)$ in Abhängigkeit von $\Gamma(1/3)$, das heißt

$$\Gamma(1/6) = 2^{-1/3} \cdot \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma(1/3)^2.$$

$$\begin{gathered}
\spadesuit \\
\pm \\
\gg\ll \\
\gg \heartsuit \ll \\
\Uparrow\gg\gg\ll\ll\Uparrow \\
>\gg\gg \emptyset \ll\ll< \\
\gg\gg\ll\ll \\
\gg\gg \circ \ll\ll \\
\gg \mathbb{H} \gg\ll \phi \ll \\
\gg\gg\gg \infty \ll\ll\ll\ll \\
\Uparrow\gg \Gamma \gg\gg\ll\ll\curvearrowleft\ll\Uparrow \\
>\gg\gg\gg\gg \wp \ll\ll\ll\ll< \\
\gg g_2 \gg\gg\ll\ll \int \ll \\
\gg\gg\gg\gg \overline{\mathbb{C}} \ll\ll\ll\ll \\
>\gg 2 \gg 0 \gg\ll 1 \ll 9 \ll< \\
\Uparrow\gg\gg\gg\gg\gg \sqrt{\pi} \ll\ll\ll\ll\ll\Uparrow \\
>\gg\gg \cap \gg\gg\gg\ll\ll\ll \square \ll\ll< \\
\| \\
\check{\square} \quad \check{\boxtimes}\check{\square} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \check{\boxtimes} \quad \check{\square}\check{\boxtimes}
\end{gathered}$$

Ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2019!