

Universität Heidelberg  
Mathematisches Institut  
Dr. Andreas Maurischat  
Julian Quast

19. Dezember 2018

## Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 9

Wintersemester 2018/19

---

### Aufgabe 1 (Gruppenoperation, 6 Punkte)

Sei  $Z$  der Zylinder von Blatt 1, Aufgabe 3 und

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ab + cd = 0 \right\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) Für alle  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$  und  $(x, y, z) \in Z$  gilt:  $(ax + by, cx + dy, z) \in Z$
- (b) Durch  $\varphi : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Bij}(Z), A \mapsto \varphi_A$  mit  $\varphi_A(x, y, z) = (ax + by, cx + dy, z)$  wird eine Links-Operation von  $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$  auf  $Z$  definiert.
- (c) Bestimmen Sie die Bahnen der Operation und beschreiben Sie den Bahnenraum  $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash Z$ .

### Aufgabe 2 (Elliptische, parabolische und hyperbolische Matrizen und ihre Fixpunkte, 6 Punkte)

Wir betrachten die Matrizen  $M_1, M_2, M_3 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gegeben durch

$$M_1 = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix},$$

welche auf  $\mathbb{H}$  durch Möbiustransformationen operieren.

1. Bestimmen Sie jeweils, ob die Matrizen elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sind.
2. Bestimmen Sie jeweils den/die Fixpunkt(e) in  $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  der induzierten Operationen auf  $\overline{\mathbb{C}}$ .

*Bitte wenden!*  $\longrightarrow$

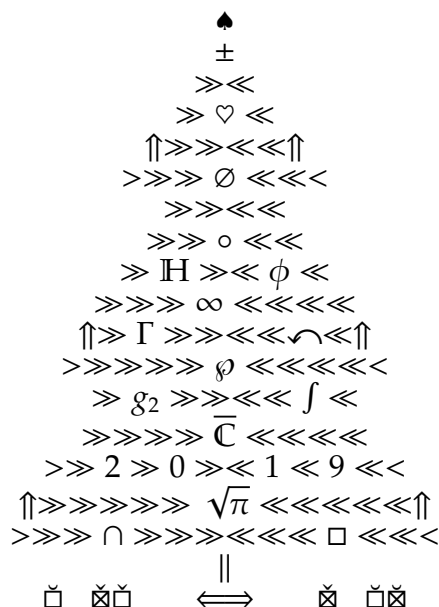
### Bonusaufgabe 3 (Grade holomorpher Abbildungen, 2 Bonuspunkte)

Sei  $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$  ein Gitter. Für welche natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gibt es eine nicht-konstante holomorphe Abbildung  $f: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  vom Grad  $n$ ?

### Bonusaufgabe 4 (Nochmals zur Gammafunktion, 2 Bonuspunkte)

Berechnen Sie  $\Gamma(1/6)$  in Abhängigkeit von  $\Gamma(1/3)$ , das heißt

$$\Gamma(1/6) = 2^{-1/3} \cdot \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} \Gamma(1/3)^2.$$



Ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2019!