Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

9. Januar 2019

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 10

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Bahnen von Fixpunkten, 6 Punkte)

Wie in Aufgabe 2 von Blatt 9 betrachten wir die Matrizen $M_1, M_2, M_3 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gegeben durch

$$M_1 = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix},$$

und $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H} \cup \mathbb{Q}$ die jeweiligen Fixpunkte der zugehörigen Möbiustransformationen. Weiter sei

$$\mathcal{F} = \left\{ w \in \mathbb{H} \,\middle|\, |w| \geq 1 \text{ und } |\Re(w)| \leq \tfrac{1}{2} \right\}$$

der Fundamentalbereich für die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-Operation auf $\mathbb{H}$ aus der Vorlesung.
Nach Bem 4.10 bzw. Satz 4.13 gibt es jeweils Matrizen $A_j \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ $(j = 1, 2, 3)$ so, dass $A_j\langle z_j \rangle \in \mathcal{F} \cup \{\infty\}$.

(a) Bestimmen Sie jeweils (d.h. für $j = 1, 2, 3$) eine solche Matrix A_j.

(b) Bestimmen Sie jeweils (d.h. für $j = 1, 2, 3$) die Menge aller solcher Matrizen.

Aufgabe 2 (Fundamentalbereiche für Untergruppen, 4 Punkte)

Sei $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Untergruppe mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Der Index $n = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ ist endlich,

(b) $-I_2 \in \Gamma$,

(c) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} \Gamma A_k$ mit geeigneten $A_k \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Weiter sei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich für die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$. Man zeige: Ist die Menge $\mathcal{F}_\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} A_k\mathcal{F}$ zusammenhängend, so ist $\mathcal{F}_\Gamma$ ein Fundamentalbereich für die Operation von Γ auf $\mathbb{H}$.

Bitte wenden! ⟶

Abgabe: **Mittwoch**, 16. Januar 2019, bis spätestens 9 Uhr ct.

Aufgabe 3 (Weitere Fundamentalbereiche, 6 Punkte)

Seien $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Weiter seien

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \left\{ z \in \mathbb{H} \,\middle|\, -\tfrac{1}{2} \leq \Re(z) \leq 0, |z| \geq 1 \right\}, \\ \mathcal{G}_2 &= \left\{ z \in \mathbb{H} \,\middle|\, 0 \leq \Re(z) \leq \tfrac{1}{2}, |z-1| \geq 1, |z| \leq 1 \right\} \quad \text{und} \\ \tilde{\mathcal{F}} &= \left\{ z \in \mathbb{H} \,\middle|\, 0 \leq \Re(z) \leq \tfrac{1}{2}, |z-1| \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die drei Mengen $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ und $\tilde{\mathcal{F}}$.

(b) Zeigen Sie $S^2\langle z \rangle = z$ für alle $z \in \overline{\mathbb{C}}$, sowie

$$S\langle i \rangle = i, \qquad S\langle \rho \rangle = -\bar{\rho}, \qquad S\langle \infty \rangle = 0, \qquad S\langle -\tfrac{1}{2} \rangle = 2.$$

(c) Zeigen Sie, dass $S\langle \mathcal{G}_1 \rangle = \mathcal{G}_2$ gilt, und folgern Sie unter Verwendung des Fundamentalbereichs aus Aufgabe 1, dass die Menge $\tilde{\mathcal{F}}$ ein Fundamentalbereich für die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-Operation auf $\mathbb{H}$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil (c), die aus Funktionentheorie 1 bekannte Tatsache, dass Möbiustransformationen verallgemeinerte Kreise (also Kreise und Geraden) wieder auf verallgemeinerte Kreise abbilden.