Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Andreas Maurischat
Julian Quast

23. Januar 2019

Funktionentheorie 2 – Übungsblatt 12

Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1 (Fourier-Entwicklung, 4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Entwicklungen von $\frac{1}{\sin(2\pi z)}$ und von $\frac{1}{\cos(2\pi z)}$.

(b) Sind diese Funktionen bei $z = \infty$ holomorph?

Aufgabe 2 (Produkte von Modulformen, 6 Punkte)

Sei $\Gamma \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe. Zeigen Sie:

(a) Sind $k, l \in \mathbb{Z}$ und $f \in V_k(\Gamma)$ bzw. $g \in V_l(\Gamma)$ Modulformen zum Gewicht k bzw. l bzgl. Γ, dann ist durch

$$(f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z) \ \ \forall z \in \mathbb{H}$$

eine Modulform aus $V_{k+l}(\Gamma)$ definiert.

(b) Liegen schon $f \in M_k(\Gamma)$ und $g \in M_l(\Gamma)$, so gilt $f \cdot g \in M_{k+l}(\Gamma)$.

(c) Ist in der Situation von (b) eine der Funktionen eine Spitzenform, so trifft dies auch auf $f \cdot g$ zu.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (Weitere Modulformen, 6 Punkte + 4 Zusatzpunkte)

Seien $\Gamma \le \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und $k, l \ge 0$. Zeigen Sie:

(a) Für eine meromorphe Funktion g auf $\mathbb{H}$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$g'(A\langle z\rangle) = (cz+d)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\Big(g(A\langle z\rangle)\Big) \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

(b) Ist $f \in M_k(\Gamma)$, so gilt für alle $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$:

$$f'(A\langle z\rangle) = ck \cdot (cz+d)^{k+1} f(z) + (cz+d)^{k+2} f'(z) \quad \forall z \in \mathbb{H}.$$

(c) Für $f \in M_k(\Gamma), g \in M_l(\Gamma)$ gilt:

$$lf'g - kfg' \in M_{k+l+2}(\Gamma).$$

(d*) Sind $f_1, \ldots, f_r \in M_k(\Gamma)$, so ist

$$d := \det \begin{pmatrix} f_1 & f_1' & f_1'' & \cdots & f_1^{(r-1)} \\ f_2 & f_2' & f_2'' & \cdots & f_2^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ f_r & f_r' & f_r'' & \cdots & f_r^{(r-1)} \end{pmatrix}$$

eine holomorphe Modulform vom Gewicht $r \cdot (k+r-1)$ bzgl. Γ.